Nümerik Analize Giriş Final 13. Haziran 2021

1) $f(x)=x^{-1/2}$ fonksiyonu ve $x_0=0{,}01$, $x_1=1$, $x_2=4$ ayrık noktaları veriliyor. $f(x)$'e karşılık gelen interpolasyon polinomunu kullanarak $\sqrt{5}$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. Ve yapılan hatayı bulunuz.

2) $\int_0^1 \cos(2\arccos x)\,dx$ integralinin Simpson yöntemiyle kesin olarak hesaplanıp hesaplanmayacağını yani hatanın sıfır olup-olmayacağını gösteriniz.

3) $\int_{-1}^{0} e^{-x} f(x)\,dx$ integralini $n=1$ için Gauss yöntemi ile hesaplanmasında $c_1=?$, $x_1=?$ sabitlerini bulunuz. Yani $\int_{-1}^{0} e^{-x} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1)$ olacak şekilde $c_1=?$ $x_1=?$ sabitlerini bulunuz. Burada $p(x)=e^{-x}$ ağırlık fonksiyonudur.

4) a) $f(x)=x-\cos x$ fonksiyonun bir tek kökünün olduğu aralığı belirleyiniz.

b) Belirlediğiniz bu aralıkta $\varphi(x)=\cos x$ ol. üzere $x_n=\varphi(x_{n-1})$ iterasyonunun $f(x)=x-\cos x$ fonksiyonun köküne yaklaştığını yani $\varphi(x)=\cos x$ in sabit nokta iterasyonu teoreminin şartlarını sağladığını gösteriniz.

Teslim Tarihi 20. Haziran 2021 Saat 23:59

Başarılar.. NA.

ε

Nümerik Analize Giriş Final Çözümleri

1) $f(x) = x^{-1/2}$, $x_0 = 0{,}01$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ Ayrık noktalar eşit aralıklı olmadığından ileri veya geri fark int. pol. hariç diğer interpolasyon polinomları kullanılabilir.

Biz burada bölünmüş fark interpolasyon polinomunu yani

$P(x) = f(x_0) + (x-x_0) f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0,x_1,x_2]$ int. pol. kullanacağız.

$f(x) = x^{-1/2} \Rightarrow f(0{,}01) = (0{,}01)^{-1/2} = 10$, $f(1) = 1$, $f(4) = 4^{-1/2} = 0{,}5$

x_i	$f(x_i)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$
0,01	10		
		$\frac{1-10}{1-0{,}01} = \frac{-9}{0{,}99} = -9{,}09090$	$\frac{-0{,}16666 + 9{,}09090}{4-0{,}01} = \frac{8{,}92424}{3{,}99} = 2{,}23665$
1	1		
		$\frac{0{,}5-1}{4-1} = \frac{-0{,}5}{3} = -0{,}16666$	
4	0,5		

olur. $\sqrt{5} = f(x) \Rightarrow \sqrt{5} = x^{-1/2} \Rightarrow x = \frac{1}{5} = 0{,}2$ olur. O halde $\sqrt{5} = f(0{,}2)$ old. dan $f(0{,}2)$ değerini yani $P(0{,}2)$ değerini hesaplarsak $\sqrt{5}$ değerini hesaplamış oluruz. O halde bu verilen ayrık noktalara göre $f(x)$ fonk. interpole eden int. polinomu $P(x)$ old. dan

$\sqrt{5} = f(0{,}2) \approx P(0{,}2)$ olur. Böylece

$$\sqrt{5} \approx P(0{,}2) = 10 + (0{,}2-0{,}01)(-9{,}09090) + (0{,}2-0{,}01)(0{,}2-1)(2{,}23665)$$
$$= 10 + 0{,}19 \cdot (-9{,}09090) + 0{,}19 \cdot (-0{,}8)(2{,}23665)$$
$$= 10 - 1{,}72721 - 0{,}33997$$
$$= 10 - 2{,}06718$$
$$= 7{,}93282 \Rightarrow \sqrt{5} \approx 7{,}93282 \text{ olur.}$$

Yapılan hata $\sqrt{5} = 2{,}2360679775$ gerçek değeri olmak üzere

$7{,}93282 - 2{,}23606 = 5{,}6976$ olur. Görüldüğü gibi hata oldukça büyüktür.

2) $\int_0^1 \cos(2\arccos x)dx$ integralinin Simpson yöntemiyle hesaplanmasında yapılan hatanın sıfır olduğunu göstereceğiz.

$\int_a^b f(x)dx$ int. Simpson yöntemiyle hesaplanmasındaki hata değerlendirmesi

$|R(f)| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4$ idi. Burada $M_4 = \max_{x\in(a,b)} |f^{(4)}(x)|$

dir. $M_4 = 0$ old. gösterilirse $R(f) = 0$ yani hatanın sıfır olduğu gösterilmiş olur. Bunun için

$f(x) = \cos(2\arccos x)$ fonksiyonun dört kez türevi alınmalıdır. Burada $\arccos x = u$ alınırsa

$\cos(2\arccos x) = \cos 2u$ olur. $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$

$\cos 2u = \cos^2 u - (1-\cos^2 u) \Rightarrow \cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ olur.

$\arccos x = u$ old.dan $x = \cos u$ olur. Böylece

$\cos 2u = 2x^2 - 1$ olur. Yani $f(x) = \cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$

dir. Dolayısıyla türevlerini alırsak

$f'(x) = 4x$, $f''(x) = 4$ $f'''(x) = 0$, $f^{(4)}(x) = 0$

olur. $M_4 = \max_{x\in(0,1)} |f^{(4)}(x)| = 0$ olur. Buna

göre $|R(f)| \leq 0 \Rightarrow R(f) = 0$ olur. Buna

göre $f(x) = \cos(2\arccos x)$ olmak üzere

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{m}\left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right)$$

olur. Yani kesin hesaplanır.

3) $P(x)=e^{-x}$ ağırlık fonk olmak üzere

$\int_{-1}^{0} e^{-x} f(x)dx \approx c_1 f(x_1)$ olacak şekilde c_1, x_1

değerlerini $n=1$ için Gauss yöntemiyle bulalım.

$n=1$ old. dan $m=2n-1$ old. dan $m=1$ olur.

Buna göre denklem sistemi

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \int_{-1}^{0} e^{-x} dx \\ c_1 x_1 &= \int_{-1}^{0} e^{-x} x dx \end{aligned}\right\}$$

şeklinde oluşur. Buradan

$c_1 = \int_{-1}^{0} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{-1}^{0} = -(1-e)$

$\underline{= -1+e}$

Diğer taraftan $\int_{-1}^{0} \overbrace{e^{-x}}^{dv} \underbrace{x}_{u} dx = -xe^{-x} \Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^{-x} dx$

$= \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) \Big|_{-1}^{0} = -(x+1)e^{-x} \Big|_{-1}^{0} = -1$ olur. Yani

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -1+e \\ c_1 x_1 &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = -1+e \quad x_1 = \frac{-1}{-1+e} \text{ olur.}$$

O halde $\int_{-1}^{0} e^{-x} f(x)dx \approx (-1+e) f\left(\frac{-1}{-1+e}\right)$

şeklinde yazılmış olur.

4) a) $f(x)=x-\cos x$ bütün reel sayılarda süreklidir.

$f(0)=-1<0$ ve $f(\pi/2)=\frac{\pi}{2}>0$ yani $f(0)f(\pi/2)<0$ old. dan $f(x)$ $[0,\pi/2]$ de en <u>az bir</u> köke sahiptir.

$f'(x)=1+\sin x$ ve $x\in[0,\pi/2]$ de $\sin x>0$ ve $1+\sin x>0$ old.dan yani $f'(x)>0$ old.dan (aynı işaretli old.dan) bu kök tektir.

b) $\varphi(x)=\cos x$ alınırsa $f(x)=x-\cos x=0 \Rightarrow x=\varphi(x)$ şeklinde yazılmış olur.

$x\in[0,\pi/2]$ iken $\varphi(x)=\cos x\in[0,\pi/2]$ old. göst.

$x\in[0,\pi/2]$ için $0\leq\cos x\leq 1$ old.dan ve $[0,1]\subset[0,\pi/2]$ old.dan $\underline{\varphi(x)=\cos x\in[0,\pi/2]}$ olur.

Şimdi de Lipschitz şartını sağladığını gösterelim.

Bunun için $x\in[0,\pi/2]$ için $|\varphi'(x)|\leq L<1$ olacak şekilde L sayısını belirleyelim.

$\varphi(x)=\cos x \Rightarrow \varphi'(x)=-\sin x$, $x\in[0,\pi/2]$ için

$|\varphi'(x)|=|-\sin x|\leq 1$ dir. Ancak $|\sin x|\leq L<1$ olacak şekilde L yi kesin şekilde belirlenemez. Bunun için $[0,\pi/2]$ aralığını daraltmamız gerekir. Buna göre

$[0,\frac{\pi}{3}]$ alınırsa $f(0)=-1<0$, $f(\pi/3)=\pi/3-\frac{1}{2}=\frac{2\pi-3}{6}$

$2\pi>3$ old.dan $f(\pi/3)>0$ yani $f(0).f(\pi/3)<0$ old.dan $[0,\pi/3]$ aralığında $f(x)=0$ bir tek kökü vardır. O halde $x\in[0,\pi/3]$ için $|\varphi'(x)|=|-\sin x|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

old.dan $L=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ old.dan $\varphi(x)=\cos x$ $[0,\pi/3]$ de Lipschitz şartını sağlar. Dolayısıyla $x_n=\varphi(x_{n-1})$ iterasyonu $n=1,2,\ldots$ için $x=x_0\in[0,\pi/3]$ başlangıç yaklaşım değeri olmak üzere $f(x)=0$ fonk kökine yakınsar. (Başlangıçta aralık $[0,\pi/3]$ alınsa idi aralığı küçültmeye gerek kalmazdı.)